NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 100, mayo de 2019, páginas 97-100

Estrategias del pensamiento relacional para resolver problemas

María Luz Callejo
(Universidad de Alicante. España)

Eloísa Montero
(Centro Universitario de Magisterio ESCUNI. España)

1. Introducción

Desde hace décadas se viene repitiendo con insistencia que en la Educación Primaria "los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática" (BOE 1/3/2014, p. 32). En la Educación Secundaria la resolución de problemas aparece en España como eje transversal en el currículum de matemáticas. Sin embargo la práctica más habitual es que la resolución de problemas suele ser un contexto para aplicar los contenidos que se han estudiado. Pero podemos invertir el orden usándolos para desencadenar el proceso de aprendizaje y no para finalizarlo. Por ejemplo, es posible que los estudiantes resuelvan problemas con números naturales o con fracciones, inventando sus propias estrategias de resolución antes de haber estudiado los algoritmos de las operaciones. Para ello deben usar el *pensamiento relacional*, entendido como la capacidad de pensar de manera flexible sobre los números y las operaciones. Esto implica: comprender las ideas de agrupar/desagrupar unidades para descomponer y recomponer números y expresiones aritméticas; usar las propiedades de las operaciones con los números naturales, fracciones, y decimales (asociativa, distributiva, conmutativa) para transformar y relacionar las expresiones aritméticas; y comprender el signo igual como una equivalencia y no solo como indicador del resultado de una operación.

A continuación, presentamos ejemplos de estrategias de resolución de problemas usadas por los estudiantes en problemas aritméticos con números naturales y con fracciones haciendo uso del pensamiento relacional de forma intuitiva.

2. Problemas aritméticos

De Castro, Molina, Gutiérrez, Martínez y Escorial (2012), apoyándose en los principios de la *Instrucción Cognitivamente Guiada* (Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999), y en el contexto del cuento "Por cuatro esquinitas de nada" (Ruillier, 2012), propusieron a niños de 4 a 6 años problemas de estructura multiplicativa del tipo: "Si un cuadradito tiene cuatro esquinitas, ¿cuántas esquinas tienen tres cuadraditos?" (multiplicación) y "Si en la casa grande hay varios cuadraditos, y en total hay veinte esquinas, ¿cuántos cuadraditos hay?" (división-medida). Los niños, apoyándose en la *modelización* con materiales diversos (banda numérica, centicubos, rekenrek…) y el *conteo*, fueron capaces de resolver estos problemas.

Además de las estrategias de modelización y conteo, los niños pueden usar *hechos numéricos* (Carpenter et al., 1999) para resolver problemas aritméticos elementales como el siguiente, de estructura aditiva: "Tengo 7 peces en la pecera y me han regalado 6 más. ¿Cuántos peces tengo?". Algunas de las estrategias identificadas en niños de los primeros cursos de Primaria son las siguientes:

Vuelta al cinco: "7 son 5 y 2, 6 son 5 y 1, tengo 10 y 3 más, 13 en total."

Paso a la decena: "7 más 3 son 10, y todavía me quedan 3 de los que me han regalado, en total son 13 peces."

Uso de dobles: "El doble de 6 es 12, y uno más 13."

En la resolución de estos problemas los estudiantes han entendido que una cantidad puede ser descompuesta en otras cantidades para simplificar el problema y facilitar la solución, y que pueden usar esta descomposición para componer otros números. En las dos primeras estrategias han usado como referencia para la descomposición o composición el 10 (7 más 3 son 10) y su mitad, el 5 (7 son 5 más 2); en la tercera han visto que una de las cantidades con la que hay que operar (el 6) es "casi" la otra(el 7). Si expresamos con números las tres estrategias anteriores vemos que los estudiantes han hecho un buen uso del pensamiento relacional utilizando descomposiciones numéricas y referentes para los números y las cantidades. Asimismo, han usado algunas propiedades de la suma de números naturales, en este caso la asociativa y la conmutativa, quizá sin ser conscientes de ello:

$$7 + 6 = (5 + 2) + (5 + 1) = 5 + 5 + 2 + 1 = (5 + 5) + (2 + 1) = 10 + 3 = 13$$

$$7 + 6 = 7 + (3 + 3) = (7 + 3) + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$7 + 6 = 1 + 6 + 6 = 1 + (6 \times 2) = 1 + 12 = 13$$

3. Problemas con fracciones

Otro contexto para usar el pensamiento relacional e introducir contenidos y procedimientos a partir de la resolución de problemas es el de las fracciones, antes de introducir los algoritmos de las operaciones. Por ejemplo, los problemas de reparto en cuyo enunciado hay números naturales, pero en los que aparecen fracciones en el resultado, pueden ayudar a construir las fracciones como números utilizando las fracciones unitarias como unidad iterativa. El estudio del comportamiento de los niños resolviendo problemas como el siguiente: "8 niños quieren repartirse 5 pizzas de manera que a todos le corresponda la misma cantidad, ¿cuánta pizza tendrá cada niño?" ha mostrado distintos tipos de estrategias (Empson y Levi, 2011).

Las siguientes estrategias de reparto, denominadas de *coordinación aditiva* (Empson y Levi, 2011), muestran evidencias del pensamiento relacional(Figuras 1 y 2).

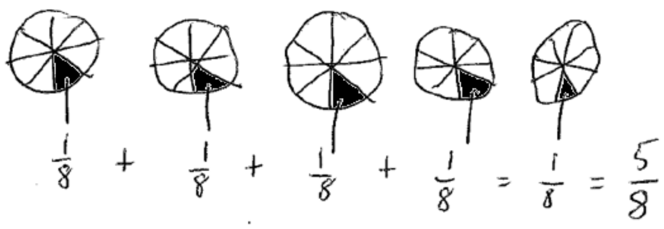

Figura 1. Respuesta con coordinación aditiva y fracción unitaria

En el ejemplo de la Figura 1, el niño divide cada pizza en 8 partes y da una parte de cada pizza a cada niño, lo que hace 5/8. Este niño relaciona el proceso de dividir una unidad en 8 partes congruentes con el tamaño de la parte que resulta, 1/8, que es una muestra de *pensamiento relacional usando la fracción unitaria*.

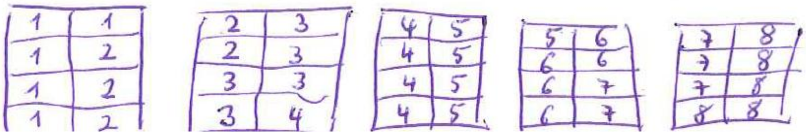

Figura 2. Respuestas con coordinación aditiva al problema de las pizzas

En el ejemplo de la Figura 2 el niño también divide la pizza en 8 partes y va agrupando las cinco partes que le da a cada niño, combinando fracciones unitarias para obtener fracciones que son múltiplos de fracciones unitarias 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 = 5/8, dando muestras de *pensamiento relacional usando la composición de fracciones*.

Este último ejemplo muestra el uso de la fracción unitaria como unidad iterativa para construir otras fracciones. Es decir, del mismo modo que para construir los números naturales se usa el 1 como unidad iterativa: 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4, etc., para construir las fracciones se pueden usar las fracciones unitarias: 1/8 + 1/8 = 2/8; 2/8 + 1/8 = 3/8; 3/8 + 1/8 = 4/8, etc. De esta manera cualquier fracción puede ser representada en términos de fracciones unitarias. Con este tipo de problema de reparto los niños pueden empezar a comprender las fracciones como las relaciones entre un "todo" que es la unidad, esa unidad dividida en partes congruentes y algunas combinaciones de esas partes. Cuando los niños comprenden estas relaciones pueden comenzar a usar esta comprensión junto a las propiedades de las operaciones y de la igualdad.

Por tanto, los problemas de reparto como el anterior son un contexto natural para que los niños combinen fracciones unitarias. En este contexto aprenden a resolver problemas y a representar sus soluciones, ya que cualquier fracción de la forma m/n se puede expresar en términos de unidades fraccionarias. Otros problemas que se pueden proponer son los de división-medida.

El ejemplo de la Figura 3 es una respuesta al problema de división-medida: "Tengo 12 pizzas y quiero dar 3/4 a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar?". El niño empieza representando las 12 pizzas con círculos, divide cada una en cuartos y asigna 3/4 de cada pizza, que aparece coloreada, a un niño. De esta manera da 3/4 de pizza a 12 niños, pero le sobran 12 cuartos de pizza. A continuación, agrupa todos los cuartos que le sobran y tiene 3 pizzas. De estas 3 pizzas da 3/4 de cada una a un niño, por tanto da a tres niños más. Por último, con los tres cuartos que le sobran de estas 3 pizzas da a un niño más. En total ha podido dar 3/4 de pizza a 12 + 3 + 1 = 16 niños.

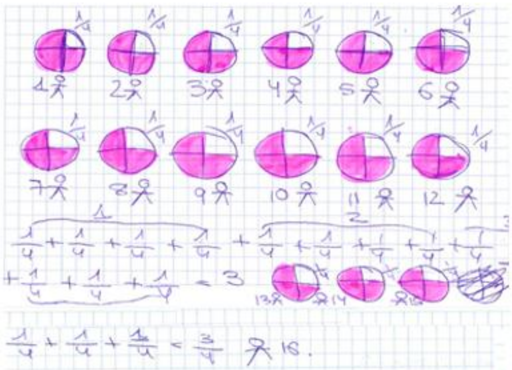

Figura 3. Respuesta al problema de las pizzas

En la resolución de este problema este niño ha descompuesto la unidad, 1 = 3/4 + 1/4, ha recompuesto fracciones unitarias para construir la unidad, 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1, y para construir un múltiplo de 1/4, cuando escribe 1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4. Esta descomposición de la unidad y su recomposición son evidencias del pensamiento relacional.

Las estrategias que han utilizado los estudiantes en los problemas aritméticos y de fracciones muestran una comprensión adecuada de la situación, aunque no hayan usado los algoritmos de las operaciones. Estos ejemplos no representan casos aislados de estudiantes, pues las investigaciones han mostrado que estudiantes con diferentes habilidades son capaces de emplear estas estrategias haciendo uso del pensamiento relacional (Empson y Levi, 2011).

Por otra parte algunos estudios han mostrado que el uso de los algoritmos no implica necesariamente un mayor nivel de éxito y que a veces los estudiantes no los usan de manera adecuada (Ivars y Fernández, 2016). Con ello no estamos proponiendo abandonar la enseñanza de los algoritmos de cálculo de las operaciones aritméticas elementales, sino enseñarlos en un contexto motivador, es decir, cuando las cantidades que intervienen en el problema son tales que las estrategias descritas anteriormente resultan pesadas y laboriosas. Por otra parte es importante que los estudiantes comprendan estos algoritmos y que los relacionen con las propiedades de los números y las operaciones.

3. Conclusión

Cuando los niños usan sus propias estrategias para resolver problemas, utilizan de manera intuitiva las propiedades fundamentales de los números y de las operaciones para transformar expresiones matemáticas. Por otra parte, cuando los profesores trabajan la resolución de problemas sin obligar a los niños a seguir un determinado procedimiento y favoreciendo su creatividad, están poniendo también las bases del pensamiento algebraico en la medida en que a través de las estrategias usadas los estudiantes: identifican relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones; transforman expresiones matemáticas; y utilizan las propiedades de las operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva) y las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad) (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005).

Bibliografía

Carpenter T., Levi L., Franke M.L., y Zeringue J.K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 37*, 53-59.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L. y Empson, S.B. (1999). *Children´s Mathematics. Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Castro, C.E. Molina, E., Gutiérrez, M.L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80*, 53-70

Empson, S.B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, 28*(1), 9-38.

Ruillier, J. (2012). *Por cuatro esquinitas de nada*. Barcelona: Editorial Juventud.

María Luz Callejo de la Vega. Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Facultad de Educación. Universidad de Alicante. Carretera San Vicente del Raspeig s/n. 03690. San Vicente del Raspeig – Alicante. Tel. 96 590 3400

Eloísa Montero Pascual. ESCUNI, Centro Universitario de Magisterio. Avda. Nuestra Señora de Fátima 102. 28047 Madrid